APLICAÇÃO DE SISTEMAS DISCRETOS EM PROBLEMA DE VENDAS DE CAMISAS

Luís Roberto Almeida GABRIEL FILHO[1]
Camila Pires Cremasco GABRIEL[2]
Manoel Leonel de PAIVA[3]
Thiago C. MELLO[4]
Paulo Victor S. AOKI[5]
Odivaldo José SERAPHIM[6]
Angelo CATANEO[7]
Luiz Roberto Almeida GABRIEL[8].

Resumo: O cálculo diferencial e integral fornece-nos ferramentas extremamente úteis para a detecção de pontos de máximo e mínimo relativos. Estudos nas áreas de sistemas discretos estão sendo revelados extremamente eficazes nos campos da computação, onde são desenvolvidos sistemas muitas vezes mais eficientes que sistemas contínuos. O presente estudo preocupou-se com problemas de implantação de novos produtos ao mercado, analisando os resultados de pesquisas com o consumidor. Estudamos, através de Curva Normal (Curva de Gauss) que representa o resultado da pesquisa, maneiras de encontrar o ponto de valor máximo e os pontos de inflexão da curva de forma discreta.

Palavras-chaves: cálculo diferencial e integral, sistemas discretos e Curva de Gauss.

1. INTRODUÇÃO

Durante a revolução francesa existiam grandes matemáticos, mas o maior matemático da época e talvez de todos os tempos era tão alemão que nunca deixou a Alemanha nem sequer para uma visita, esse era Gauss.

Seu pai era contra uma instrução adequada, mas sua mãe encorajou o filho nos seus estudos, orgulhosa do sucesso do filho morreu aos 97 anos.

Com nove anos de idade, Gauss era aluno de um professor muito exigente, que usava uma vara de marmelo para castigar seus alunos.(Professor Hans Buttnner).

Certo dia para manter a classe ocupada, pediu que seus alunos escrevessem de um a cem e somassem. Quase instantaneamente Gauss terminou o cálculo, o professor

---

[1] Docente do Curso de Administração de Empresas e Agronegócio - UNESP - Tupã/SP; Docente do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina/SP; e Doutorando do Curso de Pós - Graduação em Agronomia - Energia na Agricultura - FCA/UNESP - Botucatu/SP.

[2] Docente do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina/SP e Doutoranda do Curso de Pós - Graduação em Agronomia - Energia na Agricultura - FCA/UNESP - Botucatu/SP.

[3] Docente do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina/SP.

[4,5] Discente do 7.° Termo do Curso de Ciência da Computação - FAI - Adamantina/SP.

[6,7,8] Docente do Departamento de Engenharia Rural - FCA/UNESP - Botucatu/SP - Brasil e Docente do Departamento de Matemática - FCT/UNESP - Presidente Prudente/SP.

percebendo, perguntou você já fez? E ele disse sim. Já fiz. Nesse instante, Gauss ficou assustado e com medo, o tempo passou e os colegas, terminaram o cálculo.

O professor ao corrigir os resultados, notou que o único que tinha acertado era ele, então perguntou como você fez? Ele respondeu eu não fiz, eu pensei e pensei assim:

1	2	3	...	50
+	+	+		+
100	99	98	...	51
=	=	=		=
101	101	101	...	101

Basta então multiplicar 50 por 101 e o resultado é 5050, que eu simplesmente escrevi no caderno.

Hans Buttnner leva Gauss à diretoria e conta o fato ao diretor.

Voltando à sala de aula pede para Gauss que batesse nele, mas ele limitou-se a imitá-lo, fazendo uma circunferência com a vara de marmelo, coisa que Buttnner fazia quando ficava bravo.

Gauss teve ajuda do duque de Gottingen para estudar no colégio Brunswich.

Gostava muito de Filosofia e Matemática e tinha dúvidas qual seguiria.

No dia 30 de março de 1796, quando faltava um mês para completar 19 anos, faz uma brilhante descoberta. Construiu com régua e compasso polígono regular de 17 lados, assim ele faz opção para o mundo dos números e nós agradecemos muito.

Trabalhou em todos os ramos de matemática,tais como: teoria dos números, séries, geometria infinitesimal. Dizia: A Matemática é a rainha das Ciências e a teoria dos números é a rainha da Matemática. Era chamado de Príncipe da Matemática.

No presente estudo, encontra-se um problema de introdução de novas camisas no mercado, cuja sua dispersão de dados encaixa-se em uma distribuição normal.

Com ferramentas do cálculo diferencial e integral, será encontrado os pontos de máximo e mínimo relativos, se existirem, e também os pontos de inflexão. Utilizando-se os conceitos de derivadas discretas, visa-se encontrar os pontos de máximo e mínimo relativos e os pontos de inflexão, discretamente.

Após encontrado os pontos críticos, pode-se fazer uma análise detalhada de quais tamanhos de camisas deverão ter melhor aceitação no mercado, evitando-se ao máximo a fabricação de camisas de tamanho com pouco giro, obtendo-se assim um retorno de lucro mais rápido o quanto produzir.

2. DISCUSSÃO TEÓRICA DO TEMA

2.1. RESULTADOS SOBRE DERIVADAS CONTÍNUAS

DEFINIÇÃO 1: Segundo [Leithold, 1994], a derivada de uma função f é denotada por f', tal que seu valor em qualquer número x do domínio de f seja dado por

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

se esse limite existir.

DEFINIÇÃO 2: A função f terá um valor máximo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

DEFINIÇÃO 3: A função f terá um valor mínimo relativo em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

TEOREMA 1: Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a,b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.

DEFINIÇÃO 4: Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de número crítico de f.

DEFINIÇÃO 5: A função f terá um valor máximo absoluto num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

DEFINIÇÃO 6: A função f terá um valor mínimo absoluto num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

DEFINIÇÃO 7: O número real $f(c)$ será o valor máximo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \geq f(x)$para todos os valores de x no domínio de f.

DEFINIÇÃO 8: O número real $f(c)$ será o valor mínimo absoluto da função f se c estiver no domínio de f e se $f(c) \leq f(x)$ para todos os valores de x no domínio de f.

TEOREMA 2: TEOREMA DO VALOR EXTREMO

Se a função f for contínua no intervalo fechado $[a,b]$, então f terá um valor máximo absoluto e um valor mínimo absoluto em $[a,b]$.

TEOREMA 3: TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a,b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos de (a,b), exceto possivelmente em c:

(i) se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto, tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor mínimo relativo em c.

TEOREMA 4: TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponhamos que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e

(i) se $f''(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f''(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.

2.2 RESULTADOS SOBRE DERIVADAS DISCRETAS

DEFINIÇÃO 1: Consideremos a função $f : \mathrm{N}.h \to R$ onde $h > 0$ é um número real fixo e $\mathrm{N}h = \{n.h : n \in \mathrm{N}\}$. Segundo [Gabriel Filho, 2004], podemos definir a "derivada discreta" de f no ponto nh, $n \in \mathrm{N}$, e denotamos por $\dot{f}$, da seguinte forma:

$$\dot{f}(nh) = \frac{f((n+1).h) - f(nh)}{h} \quad .$$

DEFINIÇÃO 2: Consideremos uma função $f : \mathrm{N}h \to R$, onde $h > 0$ é um número real fixo e $\mathrm{N}h = \{n.h : n \in \mathrm{N}\}$. Definimos a "derivada segunda discreta" de f no ponto nh, $n \in \mathrm{N}$ e denotamos por $\ddot{f}$, da seguinte forma:

$$\ddot{f}(nh) = \frac{\dot{f}((n+1).h) - \dot{f}(nh)}{h}$$

OBSERVAÇÃO: Notemos que:

$$\ddot{f}(nh) = \frac{1}{h}\left[\frac{f((n+2)h) - f((n+1)h)}{h} - \frac{f((n+1)h) - f(nh)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[f((n+2)h) - 2f((n+1)h) + f(nh)\right]$$

$$\therefore \ddot{f}(nh) = \frac{f((n+2)h) - 2f((n+1)h) + f(nh)}{h^2}$$

DEFINIÇÃO 3: Seja N o conjunto de todos os números naturais e seja $\mathrm{A} \subset \mathrm{N}h$, $h > 0$, tal que: $\mathrm{A} = \{ n_0 h, (n_0+1)h, \ldots, (n_1-1)h, n_1 h \}$, com $n_0, n_1 \in \mathrm{N}$. Seja $p \in \mathrm{A}$ tal que $p = \bar{n}h.$ Dizemos que p é um "ponto crítico discreto" para a função f se $\bar{n} = n_0$, ou $\bar{n} = n_1$, ou $\dot{f}((\bar{n}-1)h) < 0$ e $\dot{f}(p) > 0$, ou $\dot{f}((\bar{n}-1)h) > 0$ e $\dot{f}(p) < 0$, ou $\dot{f}((\bar{n}-1)h) = 0$ e $\dot{f}(p) > 0$, ou $\dot{f}((\bar{n}-1)h) = 0$ e $\dot{f}(p) < 0$.

DEFINIÇÃO 4: Seja $A \subset Nh,\ \ h > 0$ tal que: $A = \{\ n_0h,\ (n_0+1)h, \ldots,\ (n_1-1)h,\ \ n_1h\ \}$, com $n_0, n_1 \in N$. Seja $p \in A$ tal que $p = \overline{n}h$ e $\overline{n} \neq n_0,\ \ \overline{n} \neq n_{1.}$. A função f terá um valor mínimo relativo em p se: $f(p) < f((\overline{n}-1)h)$ e $f(p) < f((\overline{n}+1)h)$.

DEFINIÇÃO 5: Seja $A \subset Nh,\ \ h > 0$ tal que: $A = \{\ n_0h,\ (n_0+1)h, \ldots,\ (n_1-1)h,\ \ n_1h\ \}$, com $n_0, n_1 \in N$. Seja $p \in A$ tal que $p = \overline{n}h$ e $\overline{n} \neq n_0,\ \ \overline{n} \neq n_{1.}$. A função f terá um valor máximo relativo em p se: $f(p) > f((\overline{n}-1)h)$ e $f(p) > f((\overline{n}+1)h)$.

DEFINIÇÃO 6: Se a função f possuir um valor de máximo relativo ou mínimo relativo em p, então dizemos que f possui um valor de extremo relativo em p.

TEOREMA 1: TESTE DA DERIVADA PRIMEIRA DISCRETA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Seja $A \subset Nh,\ \ h > 0$ tal que: $A = \{\ n_0h,\ (n_0+1)h, \ldots,\ (n_1-1)h,\ \ n_1h\ \}$, com $n_0, n_1 \in N$. Seja $p \in A$ tal que $p = \overline{n}h$ e $\overline{n} \neq n_0,\ \ \overline{n} \neq n_{1.}$. Então, se:

(i) $\dot{f}((\overline{n}-1)h) < 0$ e $\dot{f}(p) > 0$, então f terá um valor mínimo relativo em p.

(ii) $\dot{f}((\overline{n}-1)h) > 0$ e $\dot{f}(p) < 0$, então f terá um valor máximo relativo em p.

COROLÁRIO: Seja $A \subset Nh,\ \ h > 0$ tal que: $A = \{\ n_0h,\ (n_0+1)h, \ldots,\ (n_1-1)h,\ \ n_1h\ \}$, com $n_0, n_1 \in N$. Seja $p \in A$ tal que $p = \overline{n}h$. Se p é um ponto crítico, então $\overline{n} = n_0$, ou $\overline{n} = n_{1.}$, ou p é um extremo relativo.

TEOREMA 2: TESTE DA DERIVADA SEGUNDA DISCRETA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Seja $A \subset Nh,\ \ h > 0$ tal que: $A = \{\ n_0h,\ (n_0+1)h, \ldots,\ (n_1-1)h,\ \ n_1h\ \}$, com $n_0, n_1 \in N$. Seja $p \in A$ um ponto crítico tal que $p = \overline{n}h$ e $\overline{n} \neq n_0,\ \ \overline{n} \neq n_{1.}$. Assim,

(i) se $\ddot{f}((\overline{n}-1)h) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em p.

(ii) se $\ddot{f}((\overline{n}-1)h) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em p.

2.3. DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Um dos mais importantes exemplos de uma distribuição contínua de probabilidade é a distribuição ou a curva normal, ou a distribuição de Gauss, definida pela equação:

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

na qual μ = média, σ = desvio padrão, π =3,14159..., e =2,71828...

A área da total da curva limitada por Y e pelo eixo X é igual a 1; portanto, a área sob a curva, compreendida entra as duas coordenadas $X = a$ e $X = b$, em que $a < b$, representa a probabilidade de X estar situado entre a e b, representada por $\Pr\{a < X < b\}$.

2.4. MÉDIA

Em sua acepção mais ampla, qualquer promédio de uma distribuição de freqüência em sentido estrito, média aritmética(soma de todos os valores dividido pelo número de valores).

2.5. DESVIO PADRÃO

Medida de dispersão ou variabilidade de um conjunto de valores. É igual a raiz quadrada da soma dos desvios ao quadrado dividida pelo número de casos. Em outras palavra é a raiz quadrada da média dos desvios elevados ao quadrado. Verifica-se que quanto maior for o desvio padrão, maior será a flutuação da variável em torno da média.

2.6. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Através de uma pesquisa de mercado, uma fábrica de camisas concluiu que os consumidores, para um novo produto a ser lançado, tem média 3,3 com desvio padrão 0,8. Esta fábrica têm cinco tamanhos (de um a cinco) de camisas, e pretende colocar no mercado somente os tamanhos com mais possibilidades de venda. Quais tamanhos ela deve fabricar?

Esse é um problema que envolve tamanho que é a variável contínua, mais o número da camisa é variável discreta, então faremos uma aproximação da normal à binomial.

(i) Resolução de maneira contínua:

A função matemática que define a curva de Gauss é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\left(x-\mu/\sigma\right)^2}$$

Para a obtenção do ponto de valor máximo, deve-se fazer $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{1}{2} 2 \frac{1}{\sigma} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right] \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{x-\mu}{\sigma} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \right] \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\mu - x}{\sigma^2} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, $\frac{\mu - x}{\sigma^2} = 0$ e $x = \mu$, assim será obtido um ponto crítico. Logo $f'(x) = 0$ para $x = \mu = 3,3$.

Para determinar se o ponto crítico encontrado é de máximo ou mínio relativo, deve-se encontrar $f''(x)$ para $x = 3,3$:

$$f''(3{,}3)=\frac{1}{0{,}8\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(3{,}3-3{,}3)^2}{0{,}8^4}-\frac{1}{0{,}8^2}\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{3{,}3-3{,}3}{0{,}8}\right)^2}=-0{,}77938.$$

Como $f''(3{,}3)<0$, o ponto crítico encontrado é de máximo relativo.

Para a obtenção dos pontos de inflexão, deve-se fazer $f''(x)=0$.

$$f''(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}-\frac{1}{\sigma}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{\mu-x}{\sigma^2}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\right]\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{1}{\sigma^2}-\frac{x-\mu}{\sigma^2}\frac{\mu-x}{\sigma^2}\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\quad\Rightarrow$$

$$f''(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Fazendo $f''(x)=0$, $\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^4}-\frac{1}{\sigma^2}=0$ e $x=\mu\pm\sigma$, então os ponto de inflexão tem as abscissas $x=\mu-\sigma$ e $x=\mu+\sigma$.

$$0=\frac{1}{0{,}8\sqrt{2\pi}}\left[\frac{(x-3{,}3)^2}{0{,}8^4}-\frac{1}{0{,}8^2}\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-3{,}3}{0{,}8}\right)^2}$$

Assim $x_1=2{,}5$ e $x_2=4{,}1$.

Ilustração do gráfico na **Figura 1**.

(ii) Resolução de maneira discreta:

Seja $x=nh$ temos:

Para encontrar a derivada primeira discreta, será utilizado a seguinte equação:

$$\dot{f}(nh)=\frac{f((n+1).h)-f(nh)}{h},$$

e para encontrar a derivada segunda discreta, a seguinte equação:

$$\ddot{f}(nh)=\frac{\dot{f}((n+1).h)-\dot{f}(nh)}{h}$$

Assim foi obtida a tabela abaixo:

n	nh	$f(nh)$	$\dot{f}(nh)$	$\ddot{f}(nh)$
1	0,1	0,00017	0,00109	0,00617
2	0,2	0,00028	0,00170	0,00924
3	0,3	0,00045	0,00263	0,01358
4	0,4	0,00071	0,00399	0,01959
5	0,5	0,00111	0,00595	0,02774
6	0,6	0,00171	0,00872	0,03854
7	0,7	0,00258	0,01257	0,05250
8	0,8	0,00384	0,01782	0,07010
9	0,9	0,00562	0,02483	0,09172
10	1	0,00810	0,03401	0,11750
11	1,1	0,01150	0,04576	0,14729

12	1,2	0,01608	0,06049	0,18049
13	1,3	0,02213	0,07853	0,21596
14	1,4	0,02998	0,10013	0,25197
15	1,5	0,03999	0,12533	0,28612
16	1,6	0,05253	0,15394	0,31542
17	1,7	0,06792	0,18548	0,33639
18	1,8	0,08647	0,21912	0,34531
19	1,9	0,10838	0,25365	0,33854
20	2	0,13374	0,28751	0,31289
21	2,1	0,16249	0,31879	0,26605
22	2,2	0,19437	0,34540	0,19707
23	2,3	0,22891	0,36511	0,10664
24	2,4	0,26542	0,37577	-0,00265
25	2,5	0,30300	0,37551	-0,12626
26	2,6	0,34055	0,36288	-0,25786
27	2,7	0,37684	0,33709	-0,38980
28	2,8	0,41055	0,29811	-0,51360
29	2,9	0,44036	0,24675	-0,62080
30	3	0,46504	0,18467	-0,70367
31	3,1	0,48350	0,11431	-0,75606
32	3,2	0,49493	0,03870	-0,77399
33	3,3	0,49880	-0,03870	-0,75606
34	3,4	0,49493	-0,11431	-0,70367
35	3,5	0,48350	-0,18467	-0,62080
36	3,6	0,46504	-0,24675	-0,51360
37	3,7	0,44036	-0,29811	-0,38980
38	3,8	0,41055	-0,33709	-0,25786
39	3,9	0,37684	-0,36288	-0,12626
40	4	0,34055	-0,37551	-0,00265
41	4,1	0,30300	-0,37577	0,10664
42	4,2	0,26542	-0,36511	0,19707
43	4,3	0,22891	-0,34540	0,26605
44	4,4	0,19437	-0,31879	0,31289
45	4,5	0,16249	-0,28751	0,33854
46	4,6	0,13374	-0,25365	0,34531
47	4,7	0,10838	-0,21912	0,33639
48	4,8	0,08647	-0,18548	0,31542
49	4,9	0,06792	-0,15394	0,28612
50	5	0,05253	-0,12533	0,25197

Tabela 1: Valores obtidos discretamente de $f(nh)$, $\dot{f}(nh)$ e $\ddot{f}(nh)$ com $h = 0,1$.

Vide o gráfico da tabela 1 na **Figura 2**.

Para a melhor visualização do ponto de máximo, vide **Figura 3**. Note que no ponto onde $\dot{f}(nh) = 0$ o ponto $\ddot{f}(nh) < 0$.

Para melhor visualização dos pontos de inflexão, vide **Figura 4**.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os sistemas discretos existentes podem simular vários fenômenos do cotidiano. Neste trabalho foi criado um método para cálculo de pontos máximos de distribuição normal e encontrar seus pontos de inflexão de maneira discreta, resultado este inédito em problemas de vendas de camisas.

Utilizando-se da **Figura 4** pode-se verificar que os tamanhos das camisas mais aceitas no mercado estão entre os pontos de inflexão.

Este método pode ser utilizado não só nesse exemplo, mas também em outras áreas como: bolsa de valores, variação do consumo de energia em relação ao tempo e demais formas que tenham como característica a distribuição normal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BUSSAB, W.O. & MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. 5ª Edição. Editora Saraiva, 2002.
- GABRIEL FILHO, L.R.A. **Comportamento Assintótico de Sistemas Lineares Discretos**. Tese de Mestrado. ICMC.USP – São Carlos – SP, 2004.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 1. Editora Harbra Ltda, 1994.
- LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Volume 2. Editora Harbra Ltda, 1994.
- OLIVEIRA, F.E.M. **Estatística e Probabilidade**. 2ª Edição. Editora Atlas, 1999.
- SPIEGEL, M.R. **Estatística**. 3ª Edição. Editora Makron Books, 1994.

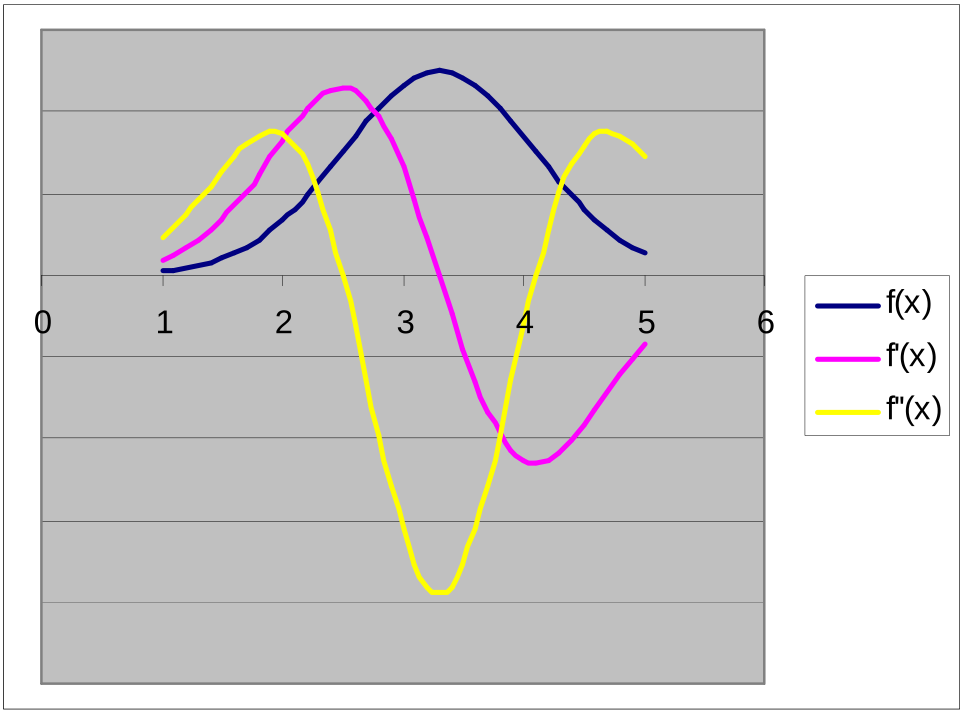

Figura 1: Gráfico dos valores obtidos continuamente de $f(x)$, $f'(x)$ e $f''(x)$.

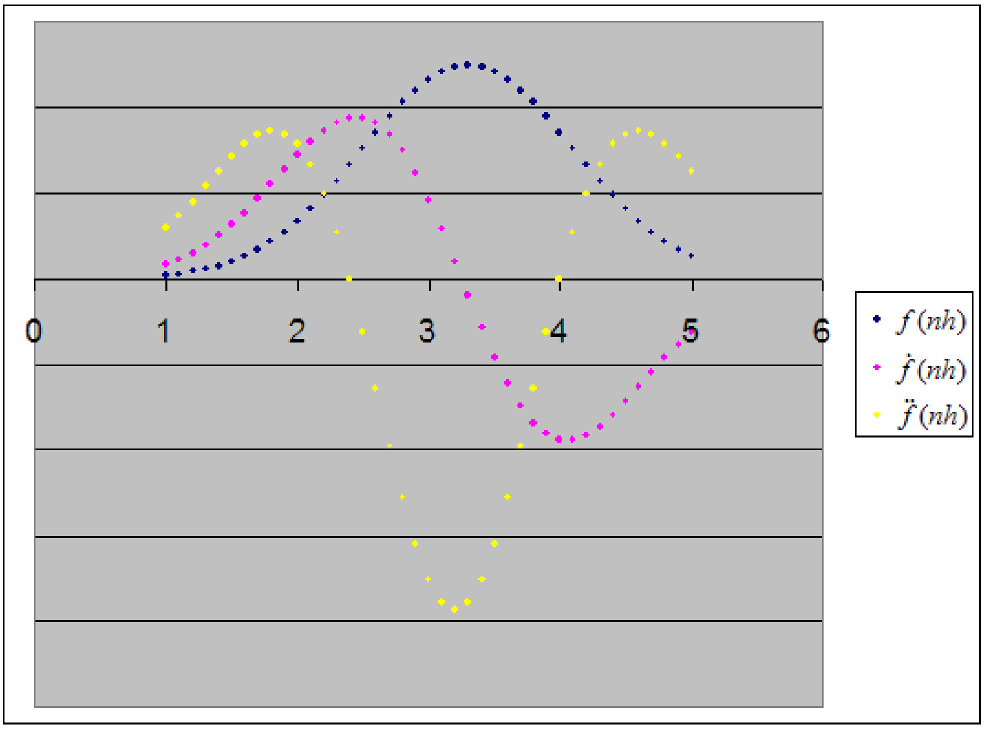

Figura 2: Gráfico dos valores obtidos discretamente de $f(nh)$, $\dot{f}(nh)$ e $\ddot{f}(nh)$ com $h = 0{,}1$.

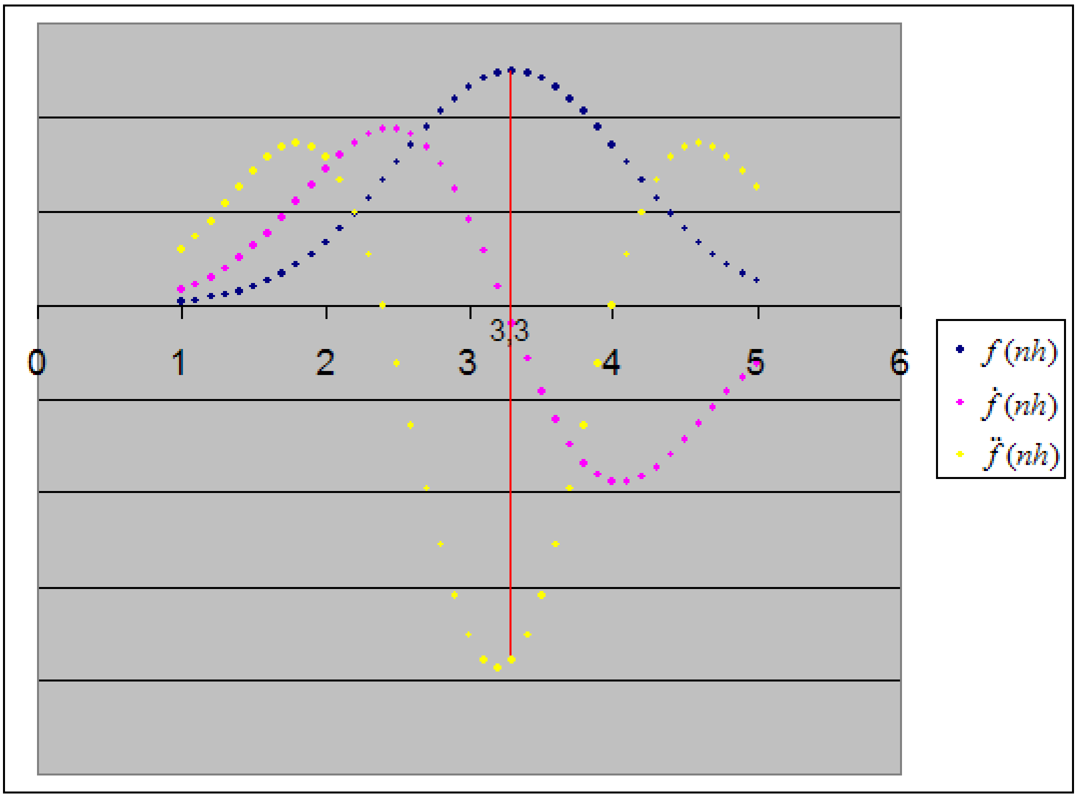

Figura 3: Indicação do ponto de máximo no caso discreto.

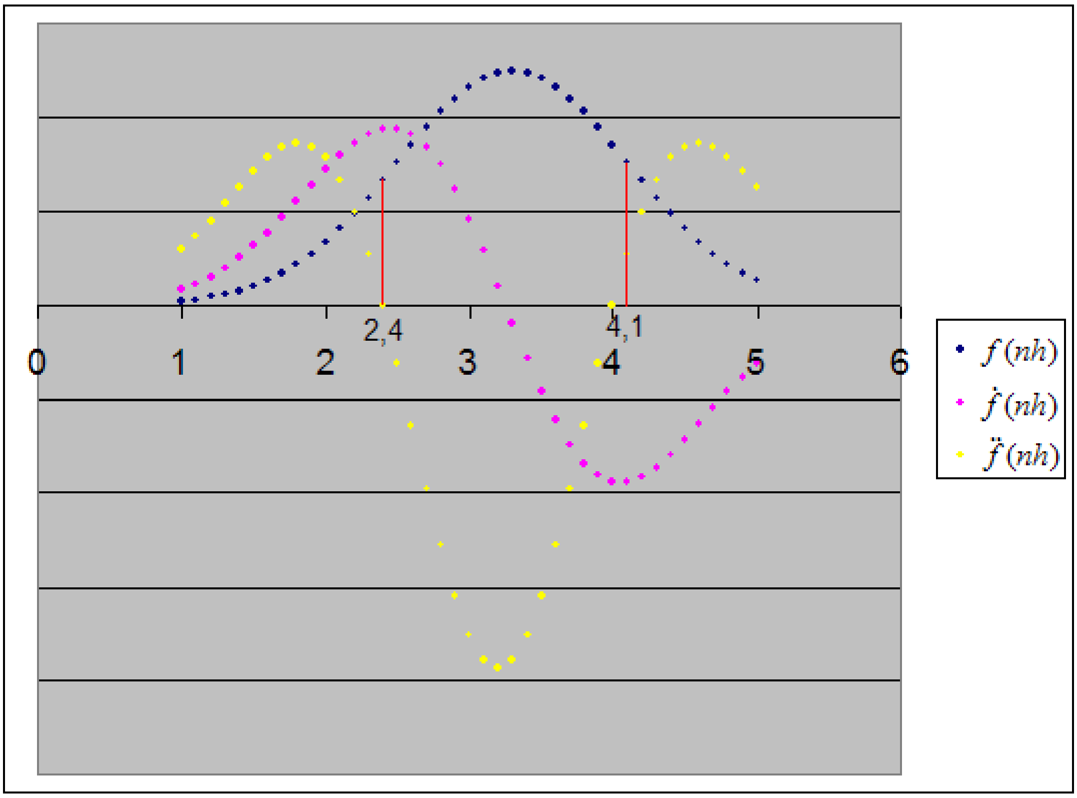

Figura 4: Indicação dos pontos de inflexão no caso discreto.