DETERMINAÇÃO GEOMÉTRICA E ECONÔMICA DA POSIÇÃO DE ARMAZÉNS DE ESTOCAGEM ENTRE CIDADES DO OESTE PAULISTA

Camila Pires Cremasco GABRIEL [1]

Luís Roberto Almeida GABRIEL FILHO [2]

Silvia Franciele BIFE[3]

Simone Leite ANDRADE[4]

Francisco Regis Zago OLIVEIRA[5]

Resumo: Neste trabalho estudaremos o local ideal para construção de um armazém entre três cidades do Estado de São Paulo. As cidades a serem estudadas são: Presidente Prudente, produtora de gado de corte, Marília, produtora de biscoitos e Bastos, produtora de ovos. Verificaremos o custo de transporte de cada produto e as condições necessárias para que as mercadorias permaneçam ideais para o consumo da população. Através de alguns dados encontraremos quatro pontos notáveis de uma região triangular e determinaremos o local viável economicamente, dentre estes quatro pontos, para a construção de um armazém. Usaremos neste trabalho algumas definições matemáticas: ortocentro, baricentro, circuncentro, incentro, distância entre dois pontos, razão entre segmentos, para encontrar o resultado do problema proposto.

Palavras-chaves: viabilidade econômica, geometria.

INTRODUÇÃO

As cidades que determinam a região triangular a ser estudada são Bastos, Marília e Presidente Prudente.

Na cidade de Presidente Prudente, paralelamente à produção agrícola, a criação do gado bovino na região, desenvolveu-se com grande expressividade. O rebanho é um dos maiores do país com aproximadamente 2.200.000 cabeças. A região é a maior exportadora de carne bovina do país e hoje, recebe o título de Capital do Nelore Mocho e também do Quarto de Milha. Semanalmente, acontecem em Prudente três leilões de gado e corte e, anualmente, realiza-se a Exposição de Animais de Presidente Prudente,

---

[1,2] Docentes do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina / SP e Doutorandos do Curso de Pós-Graduação em Agronomia - Energia na Agricultura - FCA/UNESP - Botucatu / SP – Brasil.

[4] Docente e Coordenadora do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina / SP.

[5] Docente do Departamento de Matemática - FAI - Adamantina / SP.

[3] Discente do 7° Termo do Curso Matemática - FAI - Adamantina / SP.

considerada um dos maiores eventos do país e a primeira em comercialização no Estado.

A cidade de Marília cujo nome foi inspirado no poema de Thomaz Antônio Gonzaga "Marília de Dirceu", está situada a oeste do Estado de São Paulo e também é conhecida como a "Capital Nacional do Alimento",. Destaca-se no segmento industrial com a produção de alimentos, abrigando empresas de grande porte como: Marilan: Indústria e Comércio de Biscoitos Xereta, Dori Produtos Alimentícios, Bel Produtos Alimentícios, Sasazaki e outras.

A cidade de Bastos possui aproximadamente 100 granjas avícolas, plantel de 8 milhões de aves, sendo 5,6 milhões em produção e 2,4 milhões em formação; produção de 4.200 milhões de ovos por dia, o que resulta em uma produção de 1.533 bilhões de ovos por ano, ou seja, 48,6 ovos por segundo; responsável por 26,5% da produção do Estado e 10,5% da produção do País; consumo mensal de ração balanceada: 20 mil toneladas; consumo mensal de milho: 12.150 toneladas; a avicultura emprega 1.500 pessoas no município.

No mapa do Estado de São Paulo da figura 1 destacaremos as três cidades citadas.

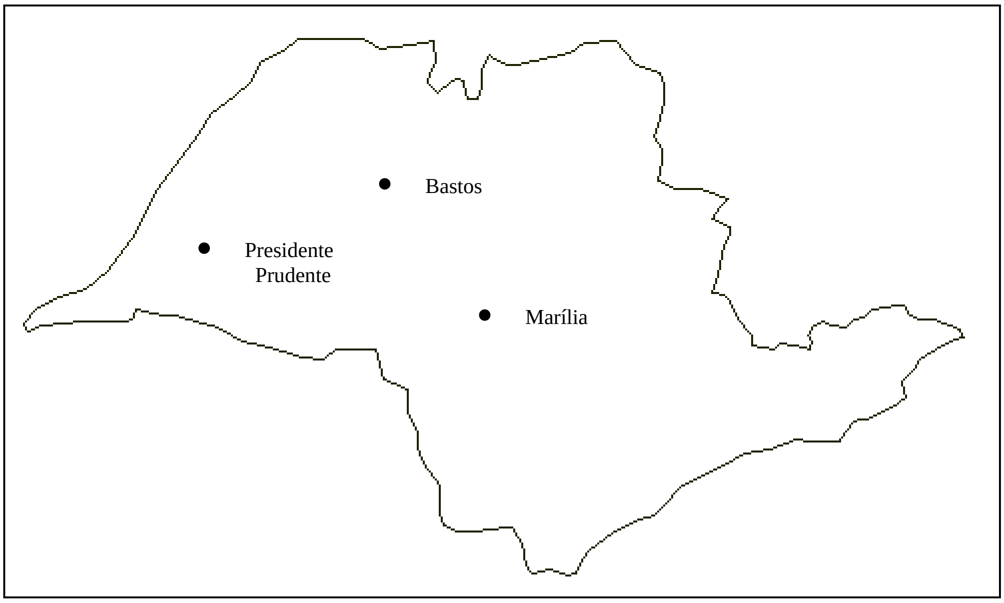

Figura 1: Mapa do Estado de São Paulo destacando as três cidades a serem estudadas.

DISCUSSÃO TEÓRICA DO TEMA:

MATERIAIS E MÉTODOS

Neste trabalho usaremos conceitos matemáticos para encontrar dentre quatro pontos geométricos importantes da matemática o local viável economicamente para a construção de um armazém entre as cidades citadas.

Estudaremos as coordenadas para os centros do triângulo. Dado um sistema de coordenadas e dados os pontos não alinhados $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$, podemos determinar um triângulo ABC cujo **baricentro G** (ponto de encontro das medianas) divide cada mediana em duas partes tais que a parte que contém o vértice é o dobro da outra.

Considerando então uma das medianas do triângulo ABC, $\overline{AM_1}$, por exemplo, onde $M_1 = \frac{B+C}{2}$ é o ponto médio do lado BC, isto é,

$$M_1 = (x_{M_1}, y_{M_1}), \text{ sendo } \quad x_{M_1} = \frac{x_2 + x_3}{2} \quad \text{e} \quad y_{M_1} = \frac{y_2 + y_3}{2},$$

o baricentro G pode ser determinado através da razão $\frac{\overline{GM_1}}{\overline{AM_1}} = \frac{1}{3}$, de onde vem

$$\frac{1}{3} = \frac{x_{M_1} - x}{x_{M_1} - x_1} \qquad e \qquad \frac{1}{3} = \frac{y_{M_1} - y}{y_{M_1} - y_1}$$

. Logo, temos:

$$G = \frac{A+B+C}{3}, \text{ ou seja } G = (x, y), \text{ sendo } \quad x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad \text{e} \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

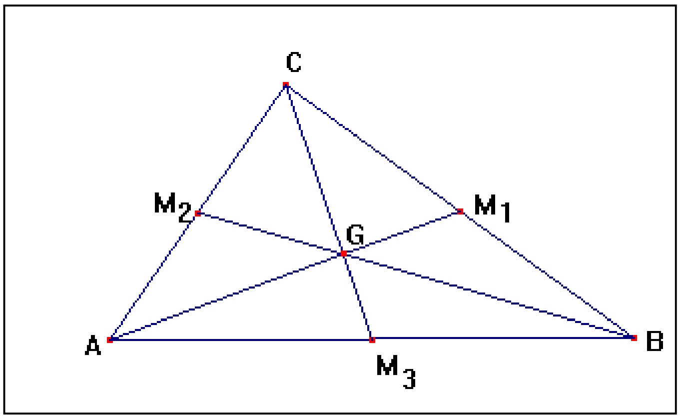

Figura 2: Representação geométrica do Baricentro de um triângulo qualquer.

O **incentro I** (ponto de encontro das bissetrizes internas) do triângulo ABC pode ser determinado por $I = \frac{aA + bB + cC}{a+b+c}$, sendo a, b e c as medianas dos lados opostos aos vértices A, B, e C, respectivamente, isto é:

$$I = (x, y), \qquad x = \frac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c} \quad \text{e} \quad y = \frac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}$$

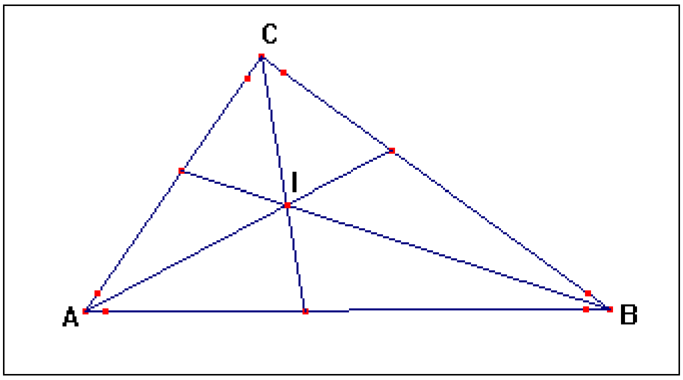

Figura 3: Representação geométrica do Incentro de um triângulo qualquer.

Determinaremos expressões análogas para o **ortocentro H** (ponto de encontro das alturas) do triângulo ABC representando os pés das alturas relativas aos vértices A, B e C por A_1, B_1, C_1 respectivamente.

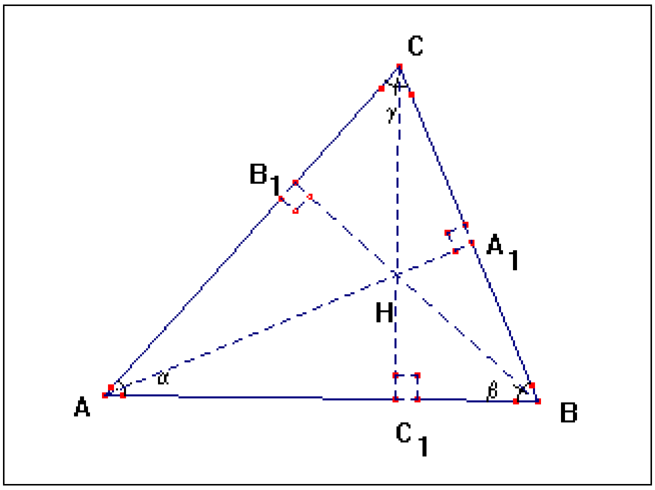

Figura 4: Representação geométrica do Ortocentro de um triângulo qualquer.

Como $BB_1 = AB_1 tg\,\alpha = B_1C\, tg\,\gamma$, temos $\dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{tg\gamma}{tg\alpha}$. Logo, o ponto B_1 divide o lado AC em segmentos proporcionais a $\tan\gamma$ e $\tan\alpha$. Portanto, o vetor $\overrightarrow{AB_1} = \dfrac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}\overrightarrow{AC}$, ou, em coordenadas:

$$B_1 = (x.y) \text{ com } (x - x_1, y - y_1) = \frac{tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}(x_3 - x_1, y_3 - y_1).$$

Daí, $B_1 = \dfrac{A\, tg\alpha + C\, tg\gamma}{tg\alpha + tg\gamma}$. De modo análogo, $C_1 = \dfrac{A\, tg\alpha + B\, tg\beta}{tg\alpha + tg\beta}$.

Como o vetor $\overrightarrow{BH}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{BB_1}$ e o vetor $\overrightarrow{CH}$ é um múltiplo do vetor $\overrightarrow{CC_1}$, temos: $\overrightarrow{BH} = \lambda\,\overrightarrow{BB_1}$ e $\overrightarrow{CH} = \mu\,\overrightarrow{CC_1}$.

Como $\overrightarrow{CH} - \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{CB}$, temos $\mu\,\overrightarrow{CC_1} - \lambda\,\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CB}$, isto é, $\mu(C_1 - C) - \lambda(B_1 - B) = B - C$.

Vamos determinar o valor de λ.Podemos simplificar os cálculos adotando a origem no ponto *C,* isto é, $C=(x_3,y_3)=(0,0)$.

Substituindo os valores anteriormente encontrados para B_1 e C_1, obtemos:

$$\mu\frac{A\,tg\alpha+B\,tg\beta}{tg\alpha+tg\beta}-\lambda\frac{A\,tg\alpha}{tg\alpha+tg\gamma}+\lambda B=B$$

$$\left(\frac{\mu\,tg\alpha}{tg\,\alpha+tg\,\beta}-\frac{\lambda\,tg\,\alpha}{tg\alpha+tg\gamma}\right)A+\left(\frac{\mu\,tg\beta}{tg\,\alpha+tg\,\beta}+\lambda-1\right)B=0.$$

Como $A-C=A=\overrightarrow{CA}$ $\quad B-C=B=\overrightarrow{CB}$ não são paralelos, devemos ter

$$\left(\frac{\mu\,tg\alpha}{tg\,\alpha+tg\,\beta}-\frac{\lambda\,tg\alpha}{tg\,\alpha+tg\gamma}\right)=0 \text{ e } \left(\frac{\mu\,tg\beta}{tg\,\alpha+tg\,\beta}+\lambda-1\right)=0.$$

Resolvendo o sistema, encontramos $\lambda=\dfrac{tg\,\alpha+tg\,\gamma}{tg\alpha+tg\beta+tg\gamma}$.

Como $\overrightarrow{BH}=\lambda\,\overrightarrow{BB_1}$, temos $H=B+\lambda\,(B_1-B)$. Substituindo o valor de B_1, obtemos:

$$H=\frac{A\,tg\alpha+B\,tg\beta+C\,tg\gamma}{tg\,\alpha+tg\,\beta+tg\,\gamma}.$$

Logo, o ortocentro de um triângulo não retângulo é a média ponderada dos vértices tendo como pesos as tangentes dos ângulos do triângulo.

A expressão anterior é válida também quando um dos ângulos do triângulo for obtuso; nesse caso, a respectiva tangente entra com seu sinal negativo.

Considerando ainda um triângulo não retângulo ABC, podemos obter o **circuncentro N** (ponto de encontro das mediatrizes) tomando os pontos P, Q e R , médios dos lados BC, AC e AB, respectivamente, sendo:

$P=\dfrac{B+C}{2}$, $\quad Q=\dfrac{A+C}{2}$, $\quad R=\dfrac{A+B}{2}$. Os ângulos do triângulo PQR são iguais aos ângulos do triângulo ABC e também PR // AC, QR // BC e QP // AB. Logo, as mediatrizes dos lados do triângulo ABC contêm as alturas do triângulo PQR.

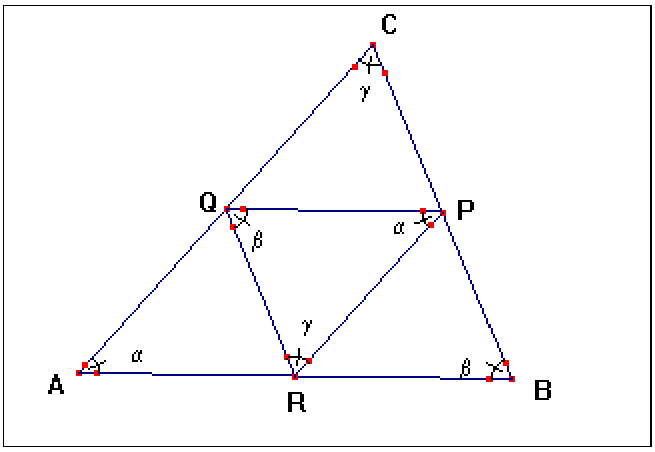

Figura 5: Estudo geométrico para encontrar o Circuncentro em um triângulo qualquer.

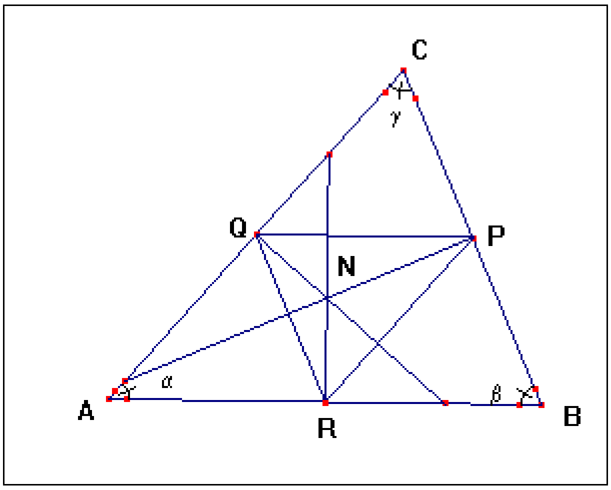

Figura 6: Representação geométrica do Circuncentro em um triângulo qualquer.

Portanto, o circuncentro N do triângulo ABC é o ortocentro do triângulo PQR. Logo,

$$N = \frac{P\,tg\alpha + Q\,tg\beta + R\,tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma} = \frac{\frac{B+C}{2}tg\alpha + \frac{A+C}{2}tg\beta + \frac{A+B}{2}tg\gamma}{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma}$$

$$= \frac{A\left(tg\beta + tg\gamma\right) + B\left(tg\alpha + tg\gamma\right) + C\left(tg\alpha + tg\beta\right)}{2\left(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma\right)} =$$

$$\frac{A+B+C}{2} - \frac{A\,tg\alpha + B\,tg\beta + C\,tg\gamma}{2\left(tg\alpha + tg\beta + tg\gamma\right)} = \frac{3}{2}G - \frac{1}{2}H,$$

sendo G o baricentro e H o ortocentro do triângulo ABC.

Esse resultado pode ser escrito como 2N = 3G – H ou, ainda, 2(N – G) = G – H. Portanto,

$2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG}.$

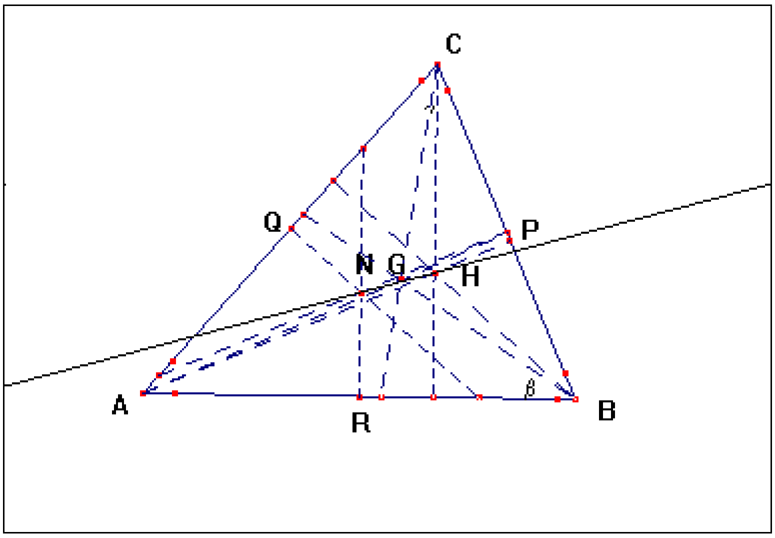

Figura 7: Representação geométrica do triângulo ABC com todos os pontos estudados.

Em todo triângulo, o ortocentro, o baricentro e o circuncentro são colineares. Além disso, o baricentro é sempre interno ao segmento que une o ortocentro ao circuncentro, sendo, dos pontos que o dividem em três partes iguais, o situado mais próximo do circuncentro. A reta que contém esses três centros do triângulo (é claro que, se o triângulo for eqüilátero, esses centros coincidem e a reta não fica determinada) é conhecida como reta de Euler.

Usando $2\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{HG}$ se o triângulo não é retângulo, podemos mostrar que

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{A}\,\mathrm{sen}\,2\alpha + \mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,2\beta + \mathrm{C}\,\mathrm{sen}\,2\gamma}{\mathrm{sen}\,2\alpha + \mathrm{sen}\,2\beta + \mathrm{sen}\,2\gamma}.$$

RESULTADOS

Consideremos um sistema de coordenadas ortogonal e os pontos não alinhados

$$A = (x_1, y_1), \qquad B = (x_2, y_2), \qquad C = (x_3, y_3),$$

sendo a posição geográfica das cidades de Presidente Prudente, Bastos e Marília respectivamente.

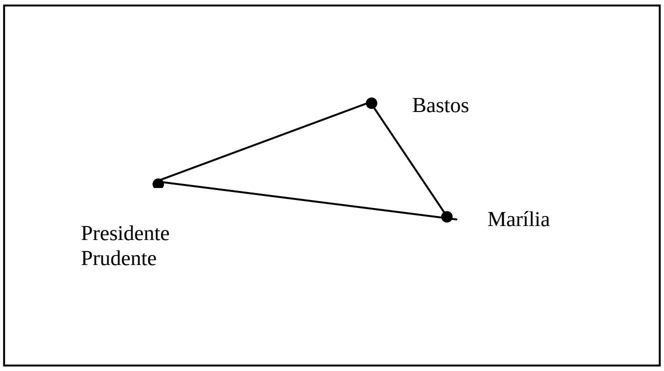

Figura 8: Região triangular com vértice nas cidades de Presidente Prudente, Bastos e Marília.

As distâncias entre as três cidades foram calculadas em linha reta utilizando o mapa rodoviário do Estado de São Paulo, Guia Quatro Rodas, na escala de 1:1.100.00, considerando assim que cada 1 cm representa no mapa 11 km. Obtemos assim que distancia de Presidente Prudente à Marília, 148,5 quilômetros, Presidente Prudente à Bastos 71,5 quilômetros, Marília à Bastos 88 quilômetros.

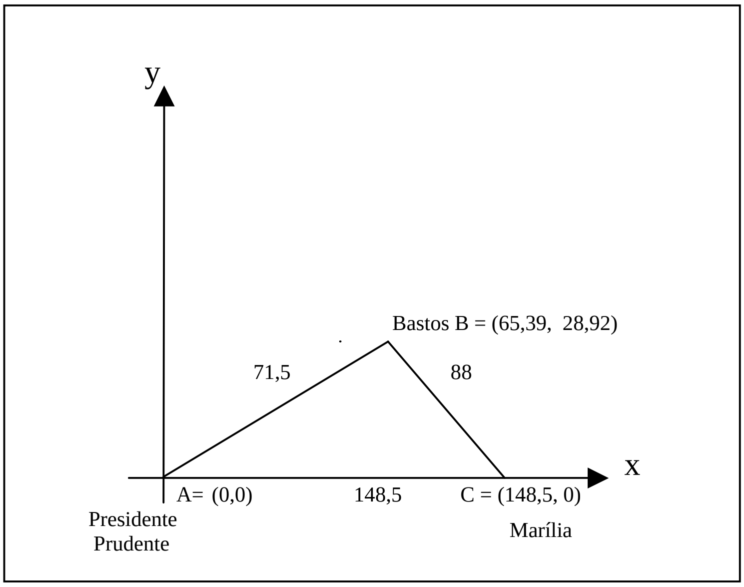

Figura 9: Sistema de coordenadas com vértice nas cidades de Presidente Prudente, Bastos e Marília.

Através do triângulo ABC é possível determinar alguns pontos com propriedades geométricas importantes entre as cidades. São eles: baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro. Para calcularmos estes pontos utilizamos algumas leis matemáticas que regem a teoria da Geometria, encontramos assim os ângulos no interior da região triangular estudada são eles, $\alpha = 24,49^{o}$, $\beta = 44,42^{o}$ e $\gamma = 19,87^{o}$. Calculamos a distância entre cada ponto notável e os vértices do triangulo formado pelas cidades e através do produto do valor por quilômetro e estas distâncias encontramos o local viável economicamente para a construção do armazém.

	P.Prudente	Bastos	Marília
Baricentro	71,95	20,16	77,8
Incentro	67,46	15	83,67
Ortocentro	67,52	13,12	84
Circuncentro	68,20	16,98	82,25

Tabela 1: Pontos geométricos encontrados através do sistema de coordenadas com vértice nas cidades citadas.

Cidade	Custo
Marília	**R$ 1,60**
Presidente Prudente	**R$ 3,20**
Bastos	**R$ 2,70**

Tabela 2: Custo do transporte das mercadorias por quilômetro.

Consideramos os valores da tabela 2 fixos. Os dados foram fornecidos por empresas nas cidades estudadas. Através das tabelas 1 e 2 encontraremos os valores de custo para transportar cada mercadoria até os pontos geométricos estudados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para obter o valor esperado associamos a tabela 1 a uma matriz D com quatro linhas e três colunas,

$$D = \begin{bmatrix} 71{,}95 & 20{,}16 & 77{,}8 \\ 67{,}46 & 15 & 83{,}67 \\ 67{,}52 & 13{,}12 & 84 \\ 68{,}20 & 16{,}98 & 82{,}25 \end{bmatrix}$$

e a tabela 2 associamos a uma matriz F com três linhas e uma coluna,

$$F = \begin{bmatrix} 1{,}60 \\ 3{,}20 \\ 2{,}70 \end{bmatrix}$$

A multiplicação da matriz D com a matriz F nos resultará uma matriz com quatro linhas e uma coluna que será a matriz correspondente ao custo de cada cidade aos pontos geométricos estudados.

$$D\,\mathrm{F} = \begin{bmatrix} 71{,}95 & 20{,}16 & 77{,}8 \\ 67{,}46 & 15 & 83{,}67 \\ 67{,}52 & 13{,}12 & 84 \\ 68{,}20 & 16{,}98 & 82{,}25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1{,}60 \\ 3{,}20 \\ 2{,}70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 389{,}69 \\ 381{,}84 \\ 376{,}82 \\ 385{,}53 \end{bmatrix}$$

O local que encontramos de melhor viabilidade econômica para a construção do armazém dentre os quatro valores geométricos estudados é o ortocentro. Neste local o custo de transporte é menor para as três cidades em relação a cada produto. Em futuros trabalhos estudaremos o custo de transporte menor para a construção de tal armazém utilizando todos os pontos dentro de qualquer área.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GEOCGE, Z.L. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática v.3, pg 33, 1983.

GUIDORIZZI, H.L. **Um curso de cálculo**. 5. ed., v.1 São Paulo: LTC, 1986.

MORGADO, A.C. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática v.43, pg 26, 2000.

POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8.ed, v.9, São Paulo: Atual, 2005